Dokončení důkazu věty 2.7.

Matematika 2

10.3.2016

Věta 2.7. *Nechť $K \subseteq R^n$, $n \in \mathbb{N}$ je uzavřená, omezená množina a $f : K \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ je spojitá funkce. Potom je f stejnoměrně spojitá.*

Důkaz. Sporem: Nechť tedy platí $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in K$:

$$\|x - y\| < \delta \wedge \|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon.$$

Volme postupně $\delta = \frac{1}{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Ke každému $n \in \mathbb{N}$ tedy existuje dvojice $x_n, y_n \in K$, pro kterou platí

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \wedge \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon.$$

Pokud by obě množiny $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ byly konečné, potom z $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ bychom měli nutně $x_n = y_n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, což je ve sporu s $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$.

Nechť tedy například množina $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ je nekonečná. Potom má dle věty (1.6) hromadný bod $x \in \mathbb{R}^n$, neboť je omezená (K je omezená). Zřejmě $x \in \overline{K}$ (každé okolí x obsahuje nějaký bod z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. nějaký bod z K). Avšak $\overline{K} = K$, neboť K je uzavřená. Tedy $x \in K$, pročež f je spojitá v x. Díky tomu lze pro $\frac{\varepsilon}{4}$ najít δ_0 takové, že

$$z \in \mathcal{U}_{\delta_0}(x) \Rightarrow \|f(z) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Najděme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $\|x - x_n\| < \frac{\delta_0}{2}$ a zároveň $n > \frac{2}{\delta_0}$. Potom máme

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} < \frac{\delta_0}{2},$$

a tedy

$$\|x - y_n\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - y_n\| < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0,$$

což znamená $y_n \in \mathcal{U}_{\delta_0}$. Díky (1) pak dostáváme

$$\varepsilon \leq \|f(x_n) - f(y_n)\| \leq \|f(x_n) - f(x)\| + \|f(x) - f(y_n)\| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

což je spor. □